ÁLGEBRA DE BOOLE.

Hemos comentado a lo largo del curso que los **sistemas digitales** pueden ser vistos de manera práctica como un conjunto de circuitos integrados o chips. Basándonos en el principio de que todos los dispositivos que intervienen en un sistema digital sólo reaccionan ante estados altos (estar prendidos, un *1* lógico) o estados bajos (estar apagados, un *0* lógico), deducimos la utilización de un sistema numérico de solamente dos valores permisibles, es decir, un **sistema binario**. Los chips intercambian información entre ellos de forma binaria, enviándose ceros y unos (0's y 1's), a éste tipo de lenguaje en particular, se le conoce como **lenguaje de máquina** o **lenguaje binario**.

La forma en que los chips involucrados manejan la información que intercambian, es decir, la forma particular de razonamiento que tienen para realizar una operación, por ejemplo, es a lo que llamamos **lógica binaria**.

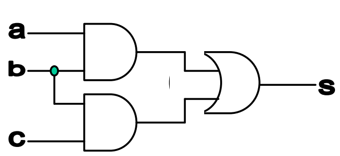
El **álgebra de Boole** al igual que el álgebra tradicional, puede definirse como un conjunto de elementos comunes, de operadores, y postulados que pueden tomarse como verdaderos. En esencia, el álgebra de Boole, se basa en *la lógica binaria y no en la aritmética* binaria, situación contraria a la del álgebra tradicional que es totalmente aritmética. ¿A qué se refiere todo esto? Bueno, a que a partir de las **operaciones lógicas** básicas **AND**, **OR** y **NOT**, se crea todo el entorno de aplicación, y como se verá posteriormente, las mismas operaciones lógicas nos permitirán implementar las aritméticas, lo importante de esto, es que debemos pensar lógicamente y no aritméticamente.

Por principio de cuentas, recordemos que ya hemos definido las tres operaciones lógicas básicas, así como la forma en la que funcionan sus operadores y símbolos respectivos. Ahora nos concretaremos a utilizarlas. La elección de los símbolos de los operadores: **.**, **+** y **-**, para cada operación, es intencional para facilitar la manipulación del álgebra de Boole de manera similar al álgebra tradicional.

Diremos, entonces que una ecuación describe una función Booleana a realizar, así por ejemplo

$$s = ab + bc$$

es una ecuación que describe una función *s* formada por tres compuertas: una compuerta OR de dos entradas, donde cada entrada está representada por una compuerta AND de dos entradas también, tal y como se puede observar en la figura siguiente:



Cada una de las letras que intervienen en la función se llaman **variable**, así tenemos tres variables (*a, b, c*) que pueden tomar como valor *0* ó *1*.

Postulados básicos.

En tus notas tomadas durante la clase, tienes escritos los 17 postulados del álgebra de Boole[1]. Los necesitaremos para apoyarnos y así hacer más breves estos apuntes. Comenzaremos entendiendo los primeros, que son a su vez, los más básicos y que necesitas aprender para poder utilizar los subsecuentes.

a) Neutros o elementos identidad.

El *neutro aditivo*, es el cero (*0*), porque al sumar cero a cualquier número, el resultado no se afecta y sigue siendo el mismo número, así:

1) $x + 0 = x$

x, es una variable que puede tomar el valor 1 ó 0.

Sí sustituimos por *1* el valor de *x*, por ejemplo, comprobamos el postulado

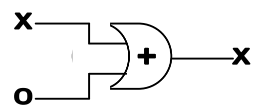
$$1 + 0 = 1$$

Para el *neutro multiplicativo*, tenemos el *1*, porque al multiplicar un número por *1*, siempre obtenemos el mismo número

2) $x \bullet 1 = x$

Al igual que en el álgebra tradicional podemos escribir el operador AND (**.**) o simplemente omitirlo para indicar el producto.

Es muy importante que notes que aunque se tratan de forma similar al álgebra tradicional, en realidad, lo que estamos aplicando no es una adición y un producto, sino una OR y una AND, respectivamente, así, para el postulado **1)**, la OR entre cualquier variable y un *0*, es siempre la misma variable:



Tomando en cuenta los postulados anteriores tenemos también sus contrapartes:

3) $x + 1 = 1$

4) $x \bullet 0 = 0$

en el **3)**, se trata de una OR en donde interviene un *1* como entrada, por lo que la salida será *1*. En el **4)**, tenemos una AND donde interviene un *0*, por lo que el resultado de la operación será *0*.

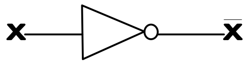
b) Existencia del Inverso.

Recordemos que el *inverso* o *complemento* de un número es lo contrario a él y se puede representar mediante dos formas:

$\bar{x}$ o bien x'

[1] Algunos autores manejan más postulados, que se deducen de los 17 anteriores. A medida que avancemos, veremos que no es necesario aprendernos todos sí sabemos deducirlos de los postulados más básicos.

La operación lógica NOT es la que nos describe el inverso, y está representada, como ya lo habíamos visto, de la siguiente manera:



suponiendo que la variable *x* asume el valor de *1*, el inverso será *0* y se representa así:

$x = 1$ entonces $\bar{x} = 0$ y viceversa.

Dada la particularidad del inversor, tenemos otros dos postulados básicos, los propios para las operaciones lógicas entre complementos:

5) $x + \bar{x} = 1$

esto se debe a que si *x=0,* su complemento será *1*, y si por el contrario *x=1*, su complemento será *0*, así, recordemos que cuando en una operación OR alguna de sus entradas es igual a *1*, automáticamente el resultado será *1*, y en este caso, siempre tenemos involucrado un *1* con cualquier variable.

De similar forma, tenemos para la AND

6) $x \bullet \bar{x} = 0$

debido a que cuando en alguna de las entradas de una compuerta AND, tenemos un *0*, automáticamente la salida será también *0*, por ejemplo, si *x* asume un valor de *1*, su complemento será *0*, por lo que la AND entre *1* y *0*, nos da como resultado un *0*.

c) Postulados de Dualidad.

Los dos postulados siguientes no son reales en el álgebra tradicional. Reiteraremos que no estamos sumando ni multiplicando por lo que no es recomendable crearnos confusiones, lo más práctico es pensar en AND, OR y NOT, así tenemos:

7) $x + x = x$

8) $x \bullet x = x$

supongamos que *x=1*, entonces la OR entre *1* y *1* será *1*, ahora, supongamos que *x=0*, entonces la OR de *0* con *0* sigue siendo *0*.

De manera similar en la AND, si *x=1*, la AND de *1* con *1* sigue siendo *1*, y la AND entre *0* y *0* es *0*.

Recapitulando, tenemos 8 postulados básicos que nos ayudarán a entender los otros restantes. No trates de aprenderlos de memoria, lo mejor sería que los analizaras y te dieras cuenta de como se aplican los principios.

Postulados de propiedades.

a) Propiedad conmutativa.

Este postulado es similar al del álgebra tradicional y solamente se refiere a que el orden de los factores no altera ni la suma ni el producto, en el caso del álgebra de Boole, no altera ni el resultado de una OR, ni el de una AND:

9) $x + y = y + x$

10) $x \bullet y = y \bullet x$

b) Postulado asociativo.

Se refiere a la particularidad de poder agrupar entre paréntesis indistintamente:

11) $x + (y + z) = (x + y) + z$

12) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

c) Postulado distributivo.

La propiedad distributiva es también llamada de *factorización*, agrupando **términos comunes** entre productos y sumas. Así el primer postulado distributivo es:

13) $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$

este postulado es válido también en el álgebra tradicional, cosa que no sucede con el siguiente, que *sólo es válido* en el álgebra de Boole:

14) $x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$

Si observas bien, los dos anteriores son contrarios entre sí, pero se tratan de manera similar, sólo que uno es para una OR y el otro para una AND, lo que facilita su comprensión.

Postulados de De Morgan.

Estos postulados son adicionales a todos los anteriores, e involucran el uso de complementos compartidos para operaciones completas. Al igual que los postulados distributivos, los de De Morgan son contrarios entre sí:

15) $\overline{x + y} = \bar{x} \bullet \bar{y}$

16) $\overline{x \bullet y} = \bar{x} + \bar{y}$

posteriormente haremos unos ejemplos donde utilizaremos estos postulados.

Postulado de involución:

El último de los postulados que consideraremos básico para deducir los demás es el de involución, que sólo hace referencia al hecho de que al complementar dos veces una misma variable, regresamos a su valor original.

17) $\overline{(\bar{x})} = x$

Ejemplos:

1. - Demostrar el postulado siguiente:

$x + x = x$

solución:

$x + x = (x + x) \bullet 1$ utilizando el postulado **2)**

$x + x = (x + x) \bullet (x + \bar{x})$ utilizando **5)**

$x + x = x + (x \bullet \bar{x})$ utilizando **14)**

$x + x = x + 0$ utilizando **1)**

finalmente

$x + x = x$

2. - Minimizar algebraicamente la siguiente expresión:

$x + xy$

solución:

buscamos factores comunes y aplicamos una factorización

$x + xy = x(1+y)$ utilizando el postulado **3)**

$x + xy = x(1)$ utilizando **2)**

finalmente

18) $x + xy = x$

a este resultado se le conoce como **postulado de absorción**, el cual también lo puedes utilizar para minimizar otras expresiones, por ejemplo:

$abc + abcd$

haciendo *abc*=*x* para facilitar la manipulación, tendríamos

$x + xd$, aplicando **18)**

$x + xd = x$

finalmente

$abc + abcd = abc$

3. - Manipular algebraicamente la siguiente expresión para obtener el resultado propuesto.

$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$

solución:

$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z + yz(x + \bar{x})$ utilizando **5)**

$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z + xyz + \bar{x}yz$ por **13)**

reacomodando, utilizando **9)**

$xy + \bar{x}z + yz = xy + xyz + \bar{x}z + \bar{x}yz$

factorizando

$xy + \bar{x}z + yz = xy(1+z) + \bar{x}z(1+y)$ por el **3)**

$xy + \bar{x}z + yz = xy(1) + \bar{x}z(1)$ utilizando **2)**

finalmente

$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$

4. – Complementar la siguiente función:

$f = x\bar{y} + \bar{x}y$

solución:

$\bar{f} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y}$

utilizando De Morgan **15)**

$\bar{f} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = (x\bar{y})(\bar{x}y)$

por De Morgan **16)**

$\bar{f} = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = (\bar{x} + \bar{y})(\bar{x} + \bar{y})$ por **17)**

$\bar{f} = (\bar{x} + y)(x + \bar{y})$

Ejercicios Propuestos Para Tarea

1. ***Simplifica al máximo*** las siguientes funciones, a través de manipulación algebraica.

a. $y = a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}$

b. $A = wxyz + \bar{x}y + 1 + 0 + y\bar{z}w$

c. $N = a\bar{c} + b + a\bar{a} + \bar{b} + \bar{a}c + a\bar{c}$

d. $P = (\bar{x} + y)(x + y + z)\bar{z}$

e. $x = \overline{(A+B)(\bar{A}+C)}$

f. $M = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}z + y\bar{z}$

2. Comprueba al menos tres de tus resultados empleando una tabla de verdad.

3. Expande en mintérminos y obtén la forma canónica de las siguientes funciones.

a. $f(a,b,c,d) = a\bar{c} + a\bar{b}d + b\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d}$

b. $f(a,b,c) = a + ac + a\bar{c}$

a. $f(w,x,y,z) = zx + y\bar{w}z + \bar{x}$

4. Del **ejercicio 1**, considera las funciones de los incisos **a** y **f**, expándelas en mínterminos y utiliza Mapas de Karnaugh para simplificar el circuito. ¿Coinciden con tus resultados de la manipulación algebraica?

5. Encuentra la expresión algebraica que describe el funcionamiento del siguiente circuito, así mismo, realiza una tabla de verdad para encontrar los diferentes valores de salida. Simplifícalo por alguno de los métodos que conoces.